Один из способов обращения задач как средство развития гибкости мышления школьников*

О.М. Абрамова

В статье рассматриваются прямые и обратные задачи как одно из средств развития гибкости мышления школьников при обучении математике. Даётся общая характеристика таких задач, приводятся их примеры и методические рекомендации по использованию.

Ключевые слова: математика, прямые и обратные задачи, обращение задач, компоненты задачи, гибкость мышления.

Сегодня всё более очевидным является тот факт, что социальный прогресс во многом зависит от того, какое количество творческих людей способны его осуществлять. Именно степенью развитости творческого начала в человеке определяется состояние науки и техники.

Свойством творческого мышления, позволяющим варьировать способы решения проблемы, перестраивать привычные действия, если они перестают отвечать требованиям меняющейся реальной действительности, проявлять оригинальность в подходе к анализу ситуаций, в возможности их переосмысливания, является гибкость мышления.

Человек с гибким мышлением быстрее адаптируется к всевозможным условиям жизни, находит нестандартные решения многих возникающих проблем, способен адекватно оценить свои результаты и, совершив ошибки на своём пути, готов к их исправлению, способен переходить от прямых связей к обратным, от одной системы действий к другой, если это допускает решаемая задача.

Следовательно, одной из важных задач школьного учителя является забота о развитии гибкости мышления учащихся. В обучении математи-

* Тема диссертации «Прямые и обратные задачи как средство развития гибкости мышления школьников при обучении математике в основной школе». Научный консультант – доктор пед. наук, профессор *М.И. Зайкин*.

ке решение данной задачи возможно при использовании прямых и обратных задач.

Под задачей, обратной к данной, будем понимать задачу, полученную из исходной путём включения найденного искомого (или искомых) в её условие, при этом одним из требований становится какое-то данное (либо данные) из условия прямой задачи.

Процесс преобразования прямой задачи в обратную называют обращением задачи.

На основе анализа учебной и методической литературы могут быть выделены три способа обращения школьных математических задач: первый из них основан на изменении самих компонентов математической задачи, второй предполагает изменение логической конструкции задачи, третий заключается в изменении формы предъявления задачи учащемуся.

Ниже будет рассмотрен лишь один из способов обращения задач, а именно изменение компонентов задачи, и в частности, один из его видов: замена одного (нескольких) из данных искомой задачи неизвестной величиной при введении искомых прямой задачи в условие обратной.

Обратная задача при таком способе обращения получается из решённой прямой задачи путём исключения одного данного из условия исходной задачи, которое становится искомым, а ответ исходной («прямой») задачи включается в условие составленной («обратной») задачи.

Подобный способ обращения наиболее характерен для текстовых задач.

В качестве примера, иллюстрирующего данный способ обращения школьных математических задач, приведём следующий:

Задача 1. Лыжник поднимался в гору 3 минуты со скоростью 150 метров в минуту, а с горы спускался 2 минуты со скоростью 300 м в минуту. Найти среднюю скорость лыжника.

Решение:
1) $150 \cdot 3 = 450$ (м),
2) $300 \cdot 2 = 600$ (м),
3) $3 + 2 = 5$ (мин),
4) $450 + 600 = 1050$ (м),
5) $1050 : 5 = 210$ (м/мин) – средняя скорость лыжника.

Для того чтобы легче было составить обратные задачи, после решения прямой задачи необходимо записать её структурную цепочку, состоящую из данных условия задачи и найденного искомого, т.е. её ответа, в следующем виде:

3 мин, 150 м/мин, 2 мин, 300 м/мин, $\boxed{\text{210 м/мин}}$.

Следуя рекомендациям П.М. Эрдниева [5], будем заключать искомое в структурной цепочке в прямоугольник – это позволяет процесс обращения задачи сделать более наглядным.

Затем составляем структурную цепочку обратной задачи, заменяя одно из данных прямой задачи неизвестной величиной, включая при этом найденное искомое (заключено в прямоугольник) в условие обратной задачи.

3 мин, $\boxed{\text{150 м/мин}}$, 2 мин, 300 м/мин, 210 м/мин.

По полученной структурной цепочке формулируем условие и требование обратной задачи 1.1.

Задача 1.1. Лыжник поднимался в гору 3 минуты с некоторой скоростью, а с горы спускался 2 минуты со скоростью 300 метров в минуту. Средняя скорость лыжника в минуту – 210 м. С какой скоростью поднимался лыжник в гору?

Решение:
1) $3 + 2 = 5$ (мин),
2) $210 \cdot 5 = 1050$ (м),
3) $300 \cdot 2 = 600$ (м),
4) $1050 - 600 = 450$ (м),
5) $450 : 3 = 150$ (м/мин).

Аналогичным образом решаем и обратную задачу 1.2, составленную по данной структурной цепочке:

$\boxed{\text{3 мин}}$, 150 м/мин, 2 мин, 300 м/мин , 210 м/мин.

Задача 1.2. Лыжник поднимался в гору 3 минуты со скоростью 150 метров в минуту, а с горы спускался 2 минуты с некоторой скоростью. Средняя скорость лыжника в минуту составляет 210 м. Найти, с какой скоростью лыжник спускался с горы.

Можно составить также обратную задачу 1.3 и по такой структурной цепочке:

$\boxed{\text{3 мин}}$, 150 м/мин, 2 мин, 300 м/мин, 210 м/мин.

Задача 1.3. Лыжник поднимался в гору несколько минут, проезжая в каждую минуту по 150 м, и 2 минуты спускался с горы со скоростью 300 м в минуту. Средняя скорость лыжника на всём пути была равна 210 м в минуту. Определить время подъёма лыжника.

Наконец, взяв за неизвестное время спуска лыжника с горы, получим ещё один вариант обратной задачи 1.4, структурная цепочка которой имеет вид:

3 мин, 150 м/мин, $\boxed{\text{2 мин}}$, 300 м/мин, 210 м/мин.

Задача 1.4. Лыжник поднимался в гору 3 минуты со скоростью 150 м в минуту, а с горы спускался несколько минут, проезжая в каждую минуту по 300 м. Средняя скорость лыжника на всем пути была равна 210 м в минуту. Определить время спуска лыжника.

Подобные упражнения по обращению задачи использовал автор технологии укрупнения дидактических единиц П.М. Эрдниев при обучении математике в начальных классах [5].

Важно подчеркнуть, что приём составления обратных задач является эффективным средством глубокого анализа задачи, позволяющим школьникам «заглянуть внутрь структуры задачи, увидеть взаимосвязи её данных, данных и искомых, то есть понять её математическую сущность.

Кроме того, решение обратных задач развивает навыки самоконтроля у учащихся, так как ответ должен совпадать с одним из данных прямой задачи.

Опираясь на данные исследований психологов, можно выделить два сензитивных периода в развитии гибкости мышления школьников: это возраст 6-ти лет и 13–14 лет, поэтому подобную работу по обращению решённой задачи при сохранении сюжета целесообразно проводить начиная с первого класса и продолжать во всех старших классах. Для более эффективного развития гибкости мышления обучаемых следует распространить понятие «обратная задача» на случаи более сложных задач, когда не одно, а 2 или более чисел из ответа замещают такое же количество данных в условии прямой задачи.

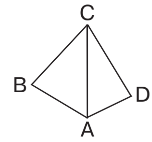
Выше мы проанализировали способ преобразования прямой текстовой задачи в обратную задачу путём замены одного или нескольких данных искомой задачи неизвестной величиной. Столь же дидактически эффективным и содержательным является подобный способ обращения, применяемый к геометрическим и алгебраическим задачам.

Проиллюстрируем это на примерах.

Задача 2. Периметр четырехугольника ABCD равен 132. Одна из его диагоналей делит четырёхугольник на два треугольника ABC и ACD с периметрами 81 и 95. Чему равна диагональ AC?

Структурная цепочка этой задачи выглядит так:

132, 81, 95, $\boxed{22}$.



Выбирая одно из данных условия исходной задачи в качестве искомого обратной задачи и включая найденное искомое прямой задачи в условие обратной, получаем следующую структурную цепочку:

$\boxed{132}$, 81, 95, 22.

На её основе составим обратную задачу 2.1:

Задача 2.1. Диагональ четырёхугольника ABCD равна 22 и делит его на два треугольника ABC и ACD с периметрами 81 и 95 соответственно. Найти периметр четырёхугольника.

Очевидно, что можно составить обратную задачу 2.2 и по такой структурной цепочке:

132, $\boxed{81}$, 95, 22.

Задача 2.2. Диагональ четырёхугольника, периметр которого 132, равна 22 и делит его на два треугольника, периметр одного из них 95. Найти периметр второго треугольника.

Аналогичную работу совершаем по составлению обратной задачи 2.3 по структурной цепочке:

132, 81, $\boxed{95}$, 22.

Задача 2.3. Диагональ АС четырёхугольника ABCD, периметр которого 132, равна 22 и делит его на два треугольника, периметр одного из них 81. Найти периметр второго треугольника.

Заметим, что в прямой задаче было три данных и одно искомое, и мы смогли составить $3 \cdot 1 = 3$ обратных задачи. Однако подобная зависимость между числом данных и искомых и количеством обратных задач не всегда выполняется.

В приведённом выше примере к исходной задаче сформулировано три обратных задачи. Вместе с тем эффективность данного способа обращения математических задач в развитии гибкости мышления учащихся зависит не столько от рассмотрения всего многообразия обратных задач к исходной, сколько от умения варьировать исходные данные с требованием задачи, проводя при этом их детальный разбор.

При обучении школьников составлению обратных задач целесообразно применять следующую последовательность действий:

1) разбить условие и требование задачи на части;

2) рассмотреть различные комбинации замены частей условия на требования задачи;

3) произвести замену части условия на требование и наоборот;

4) сформулировать полученную задачу и проверить её на разрешимость.

В качестве иллюстрации этого способа обращения алгебраической задачи приведём следующий пример:

Задача 3. Найти первый и шестой члены геометрической прогрессии, если известно, что её знаменатель равен 2, а сумма семи первых членов равна 381.

Структурная цепочка этой задачи выглядит так:

$q = 2,\ S_7 = 381,\ \boxed{b_1 = 3},\ \boxed{b_6 = 96}.$

В этом случае возможно составить следующие варианты обратных задач 3.1 – 3.5 по соответствующим им структурным цепочкам:

$q = 2,\ \boxed{S_7 = 381},\ b_1 = 3,\ \boxed{b_6 = 96}$

Задача 3.1. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а её знаменатель равен 2. Найти сумму семи первых членов и шестой член этой прогрессии.

$\boxed{q = 2},\ S_7 = 381,\ b_1 = 3,\ \boxed{b_6 = 96}$

Задача 3.2. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а сумма первых семи её членов равна 381. Найти знаменатель прогрессии и шестой член.

$q = 2,\ \boxed{S_7 = 381},\ \boxed{b_1 = 3},\ b_6 = 96$

Задача 3.3. Шестой член геометрической прогрессии равен 96, а её знаменатель равен 2. Найти первый член этой прогрессии и сумму семи первых членов.

$\boxed{q = 2},\ S_7 = 381,\ \boxed{b_1 = 3},\ b_6 = 96$

Задача 3.4. Шестой член геометрической прогрессии равен 96, а сумма первых семи её членов равна 381. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

$\boxed{q = 2},\ \boxed{S_7 = 381},\ b_1 = 3,\ b_6 = 96$

Задача 3.5. Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 3 и 96. Найти её знаменатель и сумму семи первых членов.

При составлении обратной задачи учащийся отвечает за все этапы её конструирования: выбор искомого, правильное построение условия, не говоря уже о решении и ответе.

Обратим внимание, что в этом случае гибкость мышления школьников проявляется в активном переконструировании данных прямой задачи, варьировании её компонентов, а также в изменении хода рассуждений с прямого на обратный.

Отметим положительные моменты предложенного метода в практике обучения математике в общеобразовательной школе.

Во-первых, изменяя только условие и требование задачи, учащийся за одно и то же время может решить большее количество задач, так как экономит время, уходящее на изучение условия и заключения задачи, понимание соотношений, связывающих фигурирующие в ней понятия или величины, и имеет больше времени для других этапов работы с задачей. Во-вторых, привлечение обучаемых к составлению обратных задач оказывает положительное влияние не только на развитие их творческих способностей, но и на повышение мотивации к изучению математики, поскольку в таком случае учащиеся перестают воспринимать себя исключительно в роли обучаемых. Они осознают, что работают на более высоком уровне, и это требует от них более ответственного отношения к своей деятельности.

Резюмируя изложенное выше, можно заключить, что прямые и обратные задачи могут использоваться в учебном процессе учителем математики в качестве эффективного средства развития гибкости мышления школьников, а это в свою очередь будет способствовать и повышению качества их математического образования.

Литература

1. *Крупич, В.И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В.И. Крупич. – М. : Прометей, 1995. – 66 с.

2. *Менчинская, Н.А.* Психология применения знаний к решению учебных задач / Н.А. Менчинская // Психология применения знаний к решению учебных задач. – М. : Высшая школа, 1958. – 416 с.

3. *Фридман, Л.М.* Психология детей и подростков : справочник для детей и воспитателей / Л.М. Фридман. – М. : Изд-во Ин-та психотерапии, 2003. – 480 с.

4. Хрестоматия по методике математики : методы обучения / Сост. М.И. Зайкин, С.В. Арюткина.– Арзамас : АГПИ, 2008.– 286 с.

5. *Эрдниев, П.М.* Методика упражнений по арифметике и алгебре / П.М. Эрдниев. – М. : Просвещение, 1965. – 327 с.

Олеся Михайловна Абрамова *– аспирант Арзамасского государственного педагогического института имени А.П. Гайдара, г. Арзамас.*